الفرض الأول في مــادة الـريـاضـيـات

❖ ملاحظة : أيها التلاميذ الشرفاء استغلوا المدة الزمنية للمحاولة الكتابية في الموضوع بشكل منظم ،،

التمرين الأول 04 ن

❖ ملاحظة : الأجزاء الأربعة مستقلة عن بعضها البعض { أي : لا علاقة تربط هذه الأجزاء } ،،

الجزء الأول :

أدرس قابلية اشتقاق الدوال التالية f، g و k عند العدد 1 مفسرا بيانيا في كل مرة النتيجة المحصل عليها :

$$f(x)=(x^2-2x+3)^2 \quad ,, \quad g(x)=\sqrt{x-1} \quad ,, \quad k(x)=2x|x-1|$$

الجزء الثاني :

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على IR حيث : $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1}$.

نعتبر الدالتين g و h المعرفتين على IR بـ : $g(x)=f(-x)$ و $h(x)=f(2x-1)$

- بدون تعيين الدالتين g و h ، عين الدالتين g' و h' ؟ .

الجزء الثالث :

◈ **عين مشتقات الدوال الآتية :**

.1 $f:x\mapsto(2x^2-x+3)^4$ **على IR .**

.2 $g:x\mapsto\dfrac{1}{(x^2-1)^3}$ **على** $]1;+\infty[$.

.3 $h:x\mapsto\sqrt{x^2-4}$ **على** $]2;+\infty[$.

الجزء الرابع :

من أجل $x\geq 0$ **و** n **عدد طبيعي نضع** $f_n(x)=x^n\sqrt{x}$

◈ **بين أن الدالة** f_n **تقبل الاشتقاق على** $]0;+\infty[$ **ثم عبر عن** $f'_{n+1}(x)$ **بدلالة** n **و** $f_n(x)$.

التمرين الثاني

06 ن

$(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم متعامد للمستوي ، وحدة الرسم هي $1cm$.

نعتبر الدالة u المعرّفة على IR بـِ : $u(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ نسمي $\mathscr{C}$ تمثيلها البياني .

/1

أ - عيّن نهاية الدالة u عند $-\infty$.

ب - بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x ، لدينا :

$u(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$. استنتج نهاية الدالة u عند $+\infty$.

/2

أ - بيّن أنّ $[u(x)+2x]$ تؤول إلى 0 عندما x يؤول إلى $-\infty$.

ب - بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x، $u(x)>0$. استنتج إشارة $[u(x)+2x]$.

جـ - فسّر هذه النتائج بيانيا .

نقبل أنّ الدالة u متناقصة تماما على IR . أرسم $\mathscr{C}$ و مستقيمه المقارب المائل .

❖ **ملاحظة :** على الممتحن النظامي أن يختار أحد التمرينين 3 أو 4 حسب ما درسه في القسم ،،

التمرين الثالث

10 ن

الجزء الأوّل:

نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x-\sqrt{1+x^2}$.

وَ ليكن (C) هو المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) أحسب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسياً .

ب) بيّن أنّ المستقيم (d) ذو المعادلة $y=2x$ مقارب مائل للمنحني (C) بجوار $-\infty$.

2) أ) تحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x يكون: $\sqrt{1+x^2}-x>0$.

ب) شكّل جدول تغيرات الدالة f .

ج) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

3) أ) أنشئ المماس (T) وَالمنحني (C) .

ب) حل بيانياً المتراجحة: $f(x)>2x-1$.

ج) تحقّق أنّه من أجل كل $x>0$ يكون: $x(1+f(\frac{1}{x}))=1+f(x)$.

الجزء الثّاني:

لتكن الدالة g المعرفة على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ بـ:
$$\begin{cases} g(x)=\tan x-\sqrt{1+\tan^2 x} \quad .... -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2} \\ g(\frac{\pi}{2})=0 \end{cases}$$

و ليكن (Γ) هو المنحني المثل للدالة g .

1) بيّن أنّ: $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} g(x)=g(\frac{\pi}{2})$.

2) أحسب: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -\frac{\pi}{2}} g(x)$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسياً .

3) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ يكون: $g(x)=\frac{\sin x-1}{\cos x}$.

ب) أدرس تغيّرات الدالة g ، ثمّ أنشئ منحناها (Γ) في معلم آخر .

الجزء الثالث:

لتكن الدالة h المعرّفة على $\left]-\infty;0\right]\cup\left[2;+\infty\right[$ كما يلي:
$$\begin{cases} h(x)=x-\sqrt{1+x^2} \,......... \; x\le 0 \\ h(x)=2-x-\sqrt{x^2-4x+5} \; ..... \; x\ge 2 \end{cases}$$

1) بيّن أنّ المستقيم الذي معادلته: $x=1$ هو محور تناظر للمنحني (C_h) .

2) شكل جدول تغيّرات الدالة h .

3) أنشئ (C_h) في نفس معلم الدالة f .

التمرين الرابع

10 ن

I) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x^2+\alpha x+\beta}{2x-2}$$

حيث α و β عددين حقيقين، و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

◆ عيّن α و β حيث يقبل (C_f) قيمة حدية عند 0 وَ $f(0)=-1$

II) نضع فيما يلي: $\alpha=-2$ و $\beta=2$:

❶ احسب: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجتين هندسيا.

❷ احسب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

❸

أ/ عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c حيث:

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{2x-2}$$

ب/ استنتج أنّ (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $\pm\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

ج/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

❹

أ/ بيّن أنّه من أجل كل $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ لدينا:

$$f'(x)=\frac{2x(x-2)}{(2x-2)^2}$$

ب/ ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

❺

أ/ عيّن إحداثيات النقطة ω نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x=1$.

ب/ بيّن أن النقطة ω هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

ج/ أثبت أنه لا يوجد أي مماس للمنحنى (C_f) يشمل النقطة ω .

❻ ارسم كل من (Δ) و (C_f) .

❼ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة (E) حيث:

$$f(x)=\frac{1}{2}x+m\ ...(E)$$

III) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ:

$$h(x)=f(|x|)$$

❶ ادرس شفعية الدالة h.

❷ وضّح كيف يمكن المنحنى (C_h) الممثل للدالة h انطلاقا من المنحنى (C_f) .

.... حاول ،، قاوم ،، تحدى ،، لا تتردد .... انتهى .

أيها التلاميذ الشرفاء تذكروا أنَّ : تعب المراجعة أفضل من ألم السقوط ،،

❖ ملاحظة : أيها التلاميذ الشرفاء تفحصوا الحل للتأكد من المحاولة ،، و للعلم أنه الحل مختصر ،،

التمرين الأول 04 ن

الجزء الأول :

طريقة: لدراسة قابلية اشتقاق دالة f عند a ندرس نهاية النسبة $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ لما يؤول h إلى0.

1) لدينا : $f(x)=(x^2-2x+3)^2$.

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{\left[(1+h)^2-2(1+h)+3\right]^2-4}{h}=\frac{h^2(h^2+4)}{h}$$

ومنه $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to0}h(h^2+4)=0$. إذن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 1 و لدينا $f'(1)=0$.

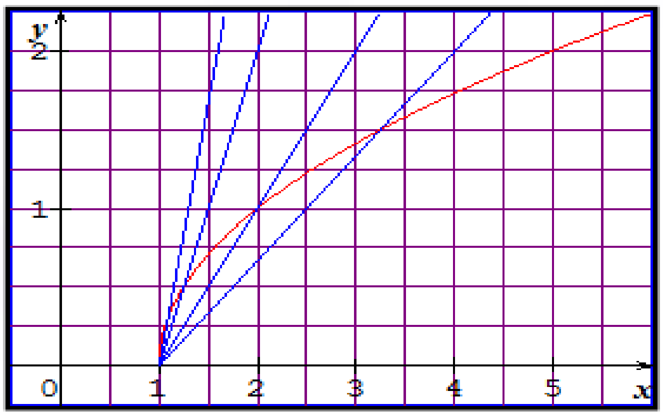
المنحني (C_f) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 1 مماسا معامل توجيهه 0 و هو موازي لمحور الفواصل.

2) لدينا: $g(x)=\sqrt{x-1}$.

$$\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\frac{\sqrt{h}}{h}=\frac{1}{\sqrt{h}}$$

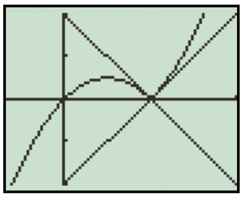
و منه $\lim\limits_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=+\infty$

إذن الدالة g غير قابلة للاشتقاق عند 2 . بما أن نهاية النسبة $\frac{g(1+h)-g(1)}{h}$ هي $+\infty$ ،، فإن معامل توجيه المستقيم (AM) حيث $A(1;0)$ و M نقطة من (C_g) فاصلتها $1+h$ يصبح كبيرا جدا لما يؤول h إلى 0 و هذا يعني أن (C_g) يقبل عند النقطة $A(1;0)$ مماسا موازيا لحامل محور التراتيب.



3) لدينا : $k(x)=2x|x-1|$

طريقة: إذا كانت نهاية النسبة $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ لما يؤول h إلى 0 غير منتهية فإن المنحني (C_f) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة a مماسا موازيا لحامل محور التراتيب.



- من أجل $h>0$، $\frac{k(1+h)-k(1)}{h}=\frac{2(h+1)|h|}{h}=2(h+1)$
- و من أجل $h<0$، $\frac{k(1+h)-k(1)}{h}=\frac{2(h+1)|h|}{h}=-2(h+1)$

نلاحظ أن هذه النسبة تقبل نهاية من اليمين عند0 مساوية لـِ 2 و نهاية من اليسار عند0 مساوية لـِ -2 .

نقول أن k تقبل الاشتقاق عند1 من اليمين و من اليسار و أن عددها المشتق من اليمين عند1 هو 2 و عددها المشتق من اليسار عند1 هو -2 و بما أنهما مختلفان فهي غير قابلة للاشتقاق عند 1 (النسبة $\frac{k(1+h)-k(1)}{h}$ لا تقبل نهاية عند0) . المنحنى (C_k) يقبل عند النقطة $A(1;0)$ نصفي مماسين معاملا توجيههما 2 و -2 .

الجزء الثاني :

- من أجل كل x من IR ، $(-x)$ ينتمي إلى IR ومنه فالدالة g قابلة للاشتقاق على IR و لدينا :

$$g'(x)=-f'(-x)=-\frac{1}{(-x)^2+(-x)+1}=-\frac{1}{x^2-x+1}$$

- من أجل كل x من IR ، $(2x-1)$ ينتمي إلى IR ومنه فالدالة h قابلة للاشتقاق على IR و لدينا:

$$h'(x)=2f'(2x-1)=2\times\frac{1}{(2x-1)^2+(2x-1)+1}=-\frac{2}{4x^2-2x+1}$$

الجزء الثالث :

1. نلاحظ أن $f=u^4$ مع $u(x)=2x^2-x+3$. الدالة u قابلة للاشتقاق على ℝ و لدينا $u'(x)=4x-1$

إذن f قابلة للاشتقاق على **IR** و لدينا $f'=4u'u^3$ و منه من أجل كل x من **IR**، $f'(x)=4(4x-1)(2x^2-x+3)^3$

2. نلاحظ أن $g=\frac{1}{u^3}$ مع $u(x)=x^2-1$ كما أن $u(x)\neq 0$ من أجل x من $]1;+\infty[$. الدالة u قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$ و لدينا $u'(x)=2x$. إذن g قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$ و لدينا $g'=-\frac{3u'}{u^4}$ و منه من أجل كل x من ℝ، $g'(x)=-\frac{3(2x)}{(x^2-1)^4}=-\frac{6x}{(x^2-1)^4}$

3. نلاحظ أن $h=\sqrt{u}$ مع $u(x)=x^2-4$. الدالة u قابلة للاشتقاق على $]2;+\infty[$ مع $u(x)>0$. إذن h قابلة للاشتقاق على $]2;+\infty[$ و لدينا $h'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ ومنه من أجل كل x من $]2;+\infty[$، $h'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$.

الجزء الرابع :

الدالة $x\mapsto x^n$ تقبل الاشتقاق على IR بينما الدالة $x\mapsto\sqrt{x}$ تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$

و منه فالدالة f_n جداؤهما تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$.

لدينا: $f_{n+1}(x)=x^{n+1}\sqrt{x}$ و منه $f'_{n+1}(x)=(n+1)x^n\sqrt{x}+x^{n+1}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$

و بالتالي $f'_{n+1}(x)=(n+1)x^n\sqrt{x}+\frac{1}{2}x^n\sqrt{x}=\left(n+\frac{3}{2}\right)x^n\sqrt{x}$

و نجد هكذا: $f'_{n+1}(x)=\left(n+\frac{3}{2}\right)f_n(x)$

.1

أ - حساب نهاية الدالة u عند $-\infty$ **:** نلاحظ أن هناك نهاية لدالة مركّبة.

لدينا $\lim_{x\to-\infty} x^2+1=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ إذن $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$ ومنه $\lim_{x\to-\infty} u(x)=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}-x=+\infty$.

ب - تبيين المساواة :

$$u(x)=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}.$$

بما أن $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}+x=+\infty$ فإن $\lim_{x\to+\infty} u(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$. { استعمال المرافق لإزالة حلة عدم التعيين }.

إذن يكون حامل محور الفواصل مقاربا أفقيا للمنحنى $\mathscr{C}$.

.2 أ - من أجل كل عدد حقيقي x، $u(x)+2x=\sqrt{x^2+1}+x$ ومنه $u(x)+2x=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$

حسب أ - لدينا $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}-x=+\infty$ إذن $\lim_{x\to-\infty}\left[u(x)+2x\right]=0$.

ب - من أجل كل عدد حقيقي x ، $u(x)=\sqrt{x^2+1}-x=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$ وبالتالي إذا كان $x\le 0$ فإن $u(x)>0$ ، و إذا كان $x\ge 0$ فإن $u(x)>0$.

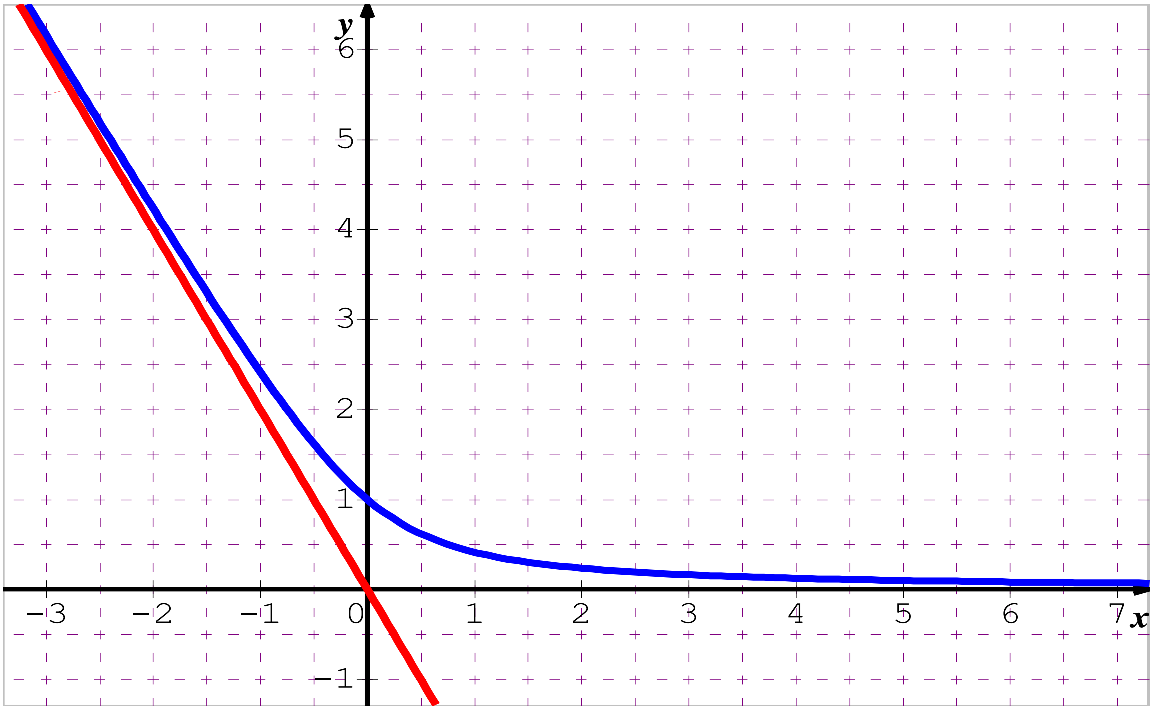
- إذن من أجل كل عدد حقيقي x، $u(x)>0$.

جـ - المستقيم D ذي المعادلة $y=-2x$ هو مقارب مائل للمنحنى $\mathscr{C}$ ، و $\mathscr{C}$ يقع فوق المستقيم D .

- $u(x)+2x>0$ معناه $u(x)>-2x$ وبالتالي يقع $\mathscr{C}$ فوق D .

* رسم المنحنى $\mathcal{C}$ و المستقيم المقارب :

- لاحظ أنّ $u(0)=1$.



التمرين الثالث

10 ن

الجزء الأول:

1) أ) حساب النهاية: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x-\sqrt{1+x^2}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}\times x+\sqrt{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x+\sqrt{1+x^2}} = 0\begin{cases}-1\\+\infty\end{cases}$$

إذن المنحني (C) يقبل حامل محور الفواصل كمستقيم مقارب بجوار $+\infty$.

ب) بيان أنّ المستقيم (d) مقارب مائل بجوار $-\infty$: أي نحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)-2x = \lim_{x\to-\infty} -x-\sqrt{1+x^2}$ ، أي:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-2x = (-x-\sqrt{1+x^2})\times\frac{-x+\sqrt{1+x^2}}{-x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{-1}{-x+\sqrt{1+x^2}} = 0\begin{cases}-1\\+\infty\end{cases}$$

إذن المستقيم (d) مقارب مائل للمنحني (C) بجوار $-\infty$.

2) أ) بيان أنّ: $\sqrt{1+x^2}-x>0$ من أجل عدد حقيقي x ، نميّز حالتين:

❖) حالة $x\geq 0$ يكون: $\sqrt{1+x^2}-x=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}>0$.

❖) حالة $x<0$ يكون: $\sqrt{1+x^2}-x>0$. و منه من أجل كل عدد حقيقي x يكون: $\sqrt{1+x^2}-x>0$.

ب) حساب f' : $f'(x)=1-\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=1-\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}}>0$.

و منه: الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

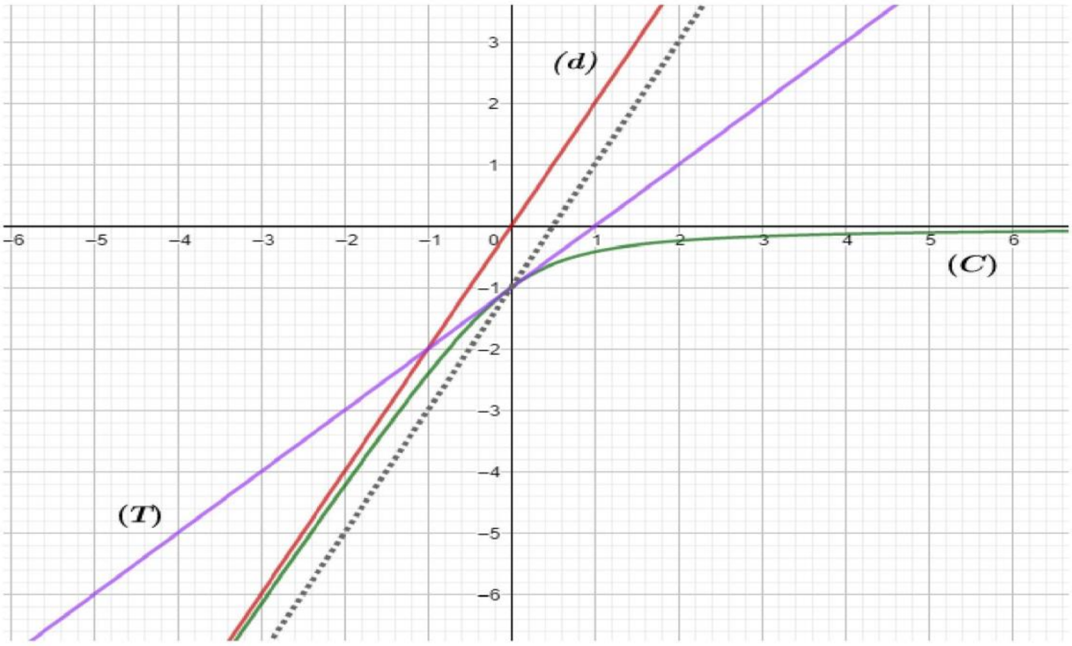
❖) جدول التغيرات:

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ 0

□

ج) معادلة المماس: $(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)$ ، و منه: $(T): y=x-1$.

3) أ) الإنشاء :



ب) حل المتراجحة : $f(x) > 2x-1$ (الحلول هي المجالات التي يكون فيها المنحني (C) فوق المستقيم ذو المعادلة $y = 2x-1$) إذن : $S = \left]-\infty;0\right[$.

ج) من أجل كل $x > 0$ يكون : $x(1+f(\frac{1}{x})) = x(1+\frac{1}{x}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}) = x+1-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = x+1-x\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}$

أي : $x(1+f(\frac{1}{x})) = x+1-\frac{x\sqrt{x^2+1}}{x} = x-\sqrt{x^2+1}+1 = f(x)+1$ ، $(\sqrt{x^2} = x \;.....; x>0)$.

الجزء الثاني :

1) بيان أنّ : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} g(x) = g(\frac{\pi}{2})$.

لدينا : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} f(\tan x)$ $= \lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} \left[\tan x - \sqrt{1+\tan^2 x}\right]$ $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} g(x) =$ ، أي :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} \tan x = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{\cos x} = +\infty \begin{cases} 1 \\ 0^+ \end{cases} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \end{cases}$$

، ومنه : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} g(x) = 0$ ، أي : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} g(x) = g(\frac{\pi}{2})$.

2) حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -\frac{\pi}{2}} g(x)$:

أي : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -\frac{\pi}{2}} g(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -\frac{\pi}{2}} f(\tan x)$ ، أي :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -\frac{\pi}{2}} \tan x = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{\cos x} = -\infty \begin{cases} -1 \\ 0^+ \end{cases} \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$$.

ومنه : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -\frac{\pi}{2}} g(x) = -\infty$ ، إذن : المستقيم ذو المعادلة $x = -\frac{\pi}{2}$ مقارب عمودي للمنحني (C) .

3) أ) لدينا : $\sqrt{\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}} - \frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{1+(\frac{\sin x}{\cos x})^2} - \frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{1+\tan^2 x} - g(x)=\tan x$ ، أي :

$g(x)=\frac{\sin x}{\cos x}-\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}=\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{1}{\cos x}$ ، ومنه : $g(x)=\frac{\sin x-1}{\cos x}$.

(توضيح : بما أنّ $x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ فإنّ : $\cos x>0$ ، أي : $\sqrt{\cos^2 x}=\cos x$).

ب) دراسة تغيرات الدالة g :

❖) حساب $g'(x)$:

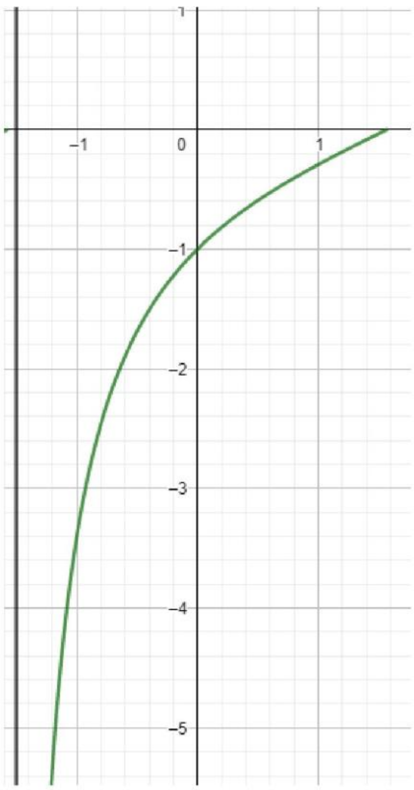
$$g'(x)=\frac{\cos x\times\cos x-(-\sin x)(\sin x-1)}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x-\sin x}{\cos^2 x}=\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}.$$

نعلم أنّ : $1-\sin x>0$ من أجل كل $x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ ، إذن : الدالة g متزايدة تماما على $x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

❖) جدول التغيرات :

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	‖	$+$	‖
$f(x)$	‖	$-\infty \nearrow 0$	‖

❖) الإنشاء :



الجزء الثالث :

1) أوّلاً نلاحظ أنّ D_h متناظرة بالنسبة إلى 1 ، ثانياً نحسب : $h\ \ 2-x$ في الحالتين ، أي :

❖) حالة $2-x \le 0$:

$$h(2-x)=2-x-\sqrt{1+(2-x)^2}=2-x-\sqrt{1+4+x^2-2x}=2-x-\sqrt{x^2-2x+5}=h(x)$$

❖) حالة $2-x \ge 2$:

$$h(2-x)=2-(2-x)-\sqrt{(2-x)^2-4(2-x)+5}=x-\sqrt{x^2+1}=h(x)\ .$$

إذن : من أجل كل x من $]-\infty;0]\cup[2;+\infty[$ يكون : $h(2-x)=h(x)$

و منه : المستقيم ذو المعادلة $x=1$ محور تناظر للمنحنى (C_h) .

2) تشكيل جدول تغيرات الدالة h :

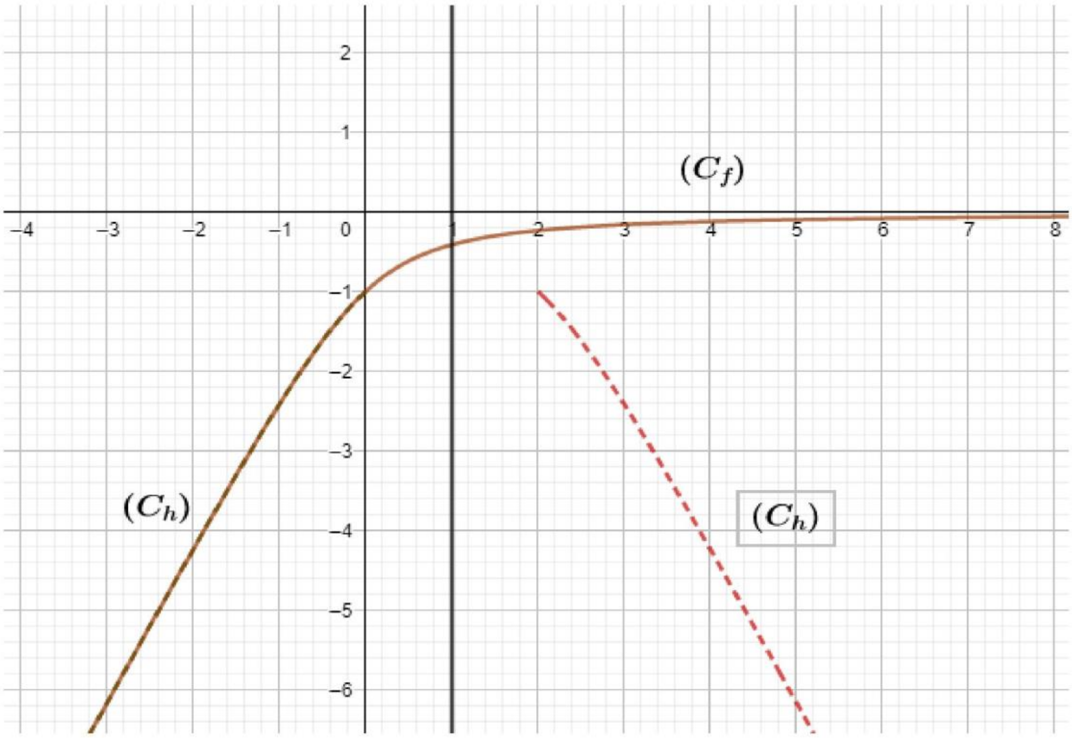
❖) لدينا على المجال $]-\infty;0]$: $h(x)=f(x)$.

❖) على المجال $[2;+\infty[$ نكمل جدول التغيرات بالحفاظ على قيم $f(x)$ و نغير إتجاه الدالة f ، لأنّ المنحنى (C_h) يناظر المنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $x=1$.

❖) جدول التغيرات على المجال $[2;+\infty[$

x	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	-1	$-\infty$

3) إنشاء (C_h) :



I) تعيين α و β حتى يقبل (C_f) قيمة حدية عند 0 وَ $f(0) = -1$:

لدينا: $f(0) = -1$ ، ومنه:

$$\frac{(0)^2 + \alpha(0) + \beta}{2(0) - 2} = -1 \Rightarrow \frac{\beta}{-2} = -1$$
$$\Rightarrow \boxed{\beta = 2}$$

ولدينا: $f(0) = -1$ تقبل قيمة حدية لـ f معناه: $f'(0) = 0$

نعيّن أولا $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+\alpha)(2x-2) - 2(x^2+\alpha x+\beta)}{(2x-2)^2} \\ &= \frac{4x^2 - 4x + 2\alpha x - 2\alpha - 2x^2 - 2\alpha x - 2\beta}{(2x-2)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 4x - 2\alpha - 2\beta}{(2x-2)^2} \end{aligned}$$

ولدينا: $f'(0) = 0$ ومنه:

$$\begin{aligned} \frac{2(0)^2 - 4(0) - 2\alpha - 2\beta}{(2(0)-2)^2} = 0 &\Rightarrow -2\alpha - 2\beta = 0 \\ &\Rightarrow -2\alpha = 2\beta \\ &\Rightarrow \alpha = -\beta \\ &\Rightarrow \boxed{\alpha = -2} \end{aligned}$$

ومنه: $\boxed{f(x) = \frac{x^2-2x+2}{2x-2}}$

II) نضع فيما يلي: $\alpha = 1$ و $\beta = -2$:

❶ حساب: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x)$:

$$\bullet \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2}\right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

التفسير الهندسي: المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = 1$

$$\bullet \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2}\right) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

التفسير الهندسي: المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x = 1$

❷ حساب: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$:

$$\bullet \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{2x}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$= +\infty$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+2}{2x-2}\right)$

$$= -\infty$$

❸

أ/ تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{2x-2}$$
$$= \frac{(ax+b)(2x-2)+c}{2x-2}$$
$$= \frac{2ax^2-2ax+2bx-2b+c}{2x-2}$$
$$= \frac{2ax^2+(2b-2a)x-2b+c}{2x-2}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2b-2a=-2 \\ -2b+c=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -\dfrac{1}{2} \\ c = 1 \end{cases}$$

إذن: $\boxed{f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x-2}}$

ب/ استنتاج أنّ (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2x-2}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right]$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{1}{2x-2}\right]$$
$$= 0$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $\pm\infty$ معادلته : $y_{(\Delta)} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

ج/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ):

$$f(x) - y_{(\Delta)} = \frac{1}{2x-2}$$

لدينا: $2x-2=0$ معناه: $x=1$ ومنه:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)-y_{(\Delta)}$	$-$	‖	$+$

ومنه:

- (C_f) تحت (Δ) لما $x \in \ ]-\infty;1[$.
- (C_f) فوق (Δ) لما $x \in \ ]1;+\infty[$.

❹

أ/ تبيين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}-\{1\}$ لدينا: $f'(x) = \frac{2x(x-2)}{(2x-2)^2}$:

$$f'(x)=\frac{(2x-2)(2x-2)-2(x^2-2x+2)}{(2x-2)^2}$$
$$=\frac{4x^2-4x-4x+4-2x^2+4x-4}{(2x-2)^2}$$
$$=\frac{2x^2-4x}{(2x-2)^2}$$
$$=\frac{2x(x-2)}{(2x-2)^2}$$

ب/ دراسة تغيرات الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها:

لدينا: $(2x-2)^2>0$ ومنه: إشارة $f'(x)$ من إشارة $2x(x-2)$:

لدينا:

$$2x(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} 2x=0 \\ \text{أو} \\ x-2=0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{أو} \\ x=2 \end{cases}$$

ومنه:

- جدول تغيرات الدالة f

<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>$+$</td><td>0 $-$</td><td>||</td><td>$-$ 0</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$-\infty$ ↗</td><td>-1 ↘ $-\infty$</td><td>||</td><td>$+\infty$ ↘ 1</td><td>↗ $+\infty$</td></tr>
</table>

❺

أ/ ايجاد إحداثيي النقطة ω نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x=1$:

نعوض $x=1$ في معادلة المستقيم (Δ):

$$y=\frac{1}{2}(1)-\frac{1}{2}\Rightarrow y=0$$

ومنه: $\omega(1;0)$

ب/ تبيين أن النقطة ω هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) :

- لدينا: $x\in D_f$

معناه: $x\in\ ]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ معناه: $x<1$ أو $x>1$

معناه: $(-x)>-1$ أو $(-x)<-1$ معناه: $(2(1)-x)>1$ أو $(2(1)-x)<1$

معناه: $(2(1)-x)\in\ ]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ معناه: $(2(1)-x)\in D_f$

- ولدينا:

$$f(2(1)-x)+f(x)=\frac{(2-x)^2-2(2-x)+2}{2(2-x)-2}+\frac{x^2-2x+2}{2x-2}$$

مركز التناظر:
نقول أن النقطة $\Omega(\alpha;\beta)$ مركز تناظر (C_f) إذا تحقق ما يلي:

$$\begin{cases} 2\alpha - x \in D_f \\ f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta \end{cases}$$

أو

$$\begin{cases} (\alpha + x) \in D_f \\ (\alpha - x) \in D_f \\ f(\alpha + x) + f(\alpha - x) = 2\beta \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4 - 4x + x^2 - 4 + 2x + 2}{4 - 2x - 2} + \frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2} \\
&= 0\frac{x^2 - 2x + 2}{-(2x - 2)} + \frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2} \\
&= 0 \\
&= 2(0)
\end{aligned}$$

إذن النقطة ω هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

ج/ اثبات أنه لا يوجد أي مماس للمنحنى (C_f) يشمل النقطة ω

إذا وُجد مماس لـ (C_f) يشمل $\omega(1;0)$ معناه يوجد $a \in \mathbb{R} - \{1\}$ يحقق:

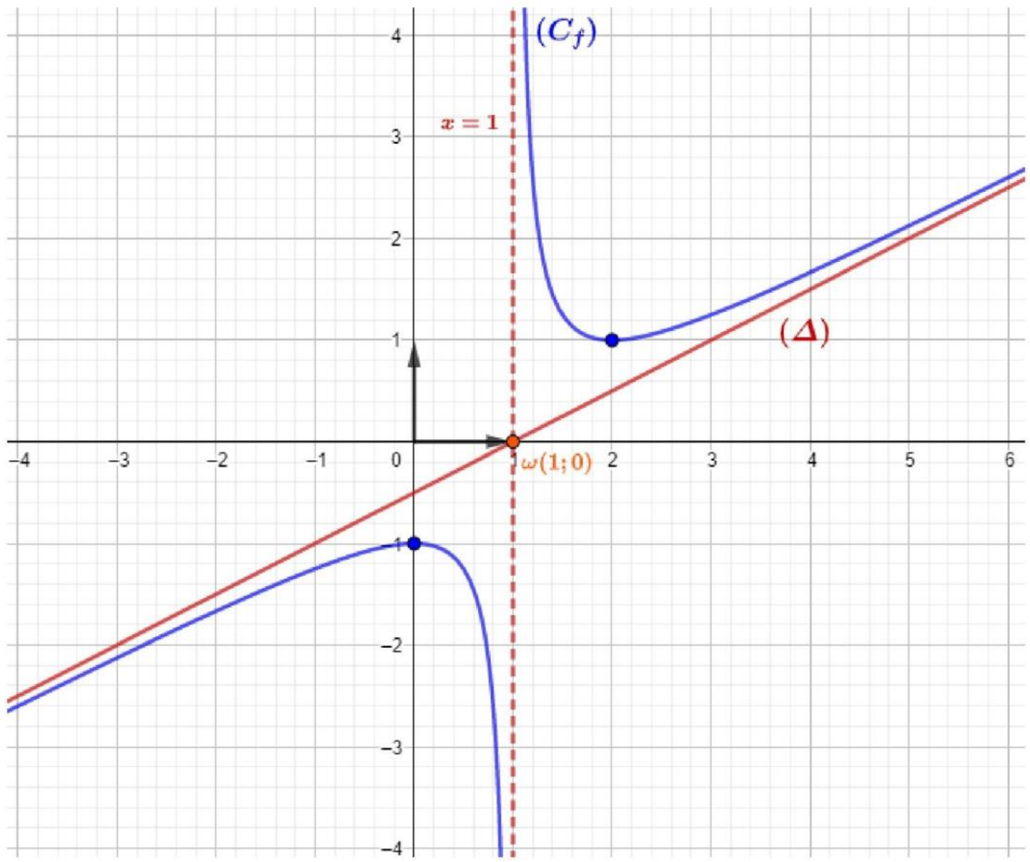
$$f'(a)(x_\omega - a) + f(a) = y_\omega$$

لدينا:

$$\begin{aligned}
f'(a)(x_\omega - a) + f(a) = y_\omega &\Rightarrow f'(a)(1 - a) + f(a) = 0 \\
&\Rightarrow \frac{2a(a-2)}{(2a-2)^2} - \frac{2a(a-2)}{(2a-2)^2}a + \frac{a^2 - 2a + 2}{2a - 2} = 0 \\
&\Rightarrow \frac{2a(a-2) - 2a^2(a-2) + (a^2 - 2a + 2)(2a - 2)}{(2a-2)^2} = 0 \\
&\Rightarrow 2a^2 - 4a - 2a^3 + 4a^2 + 2a^3 - 2a^2 - 4a^2 + 4a + 4a - 4 = 0 \\
&\Rightarrow 4a - 4 = 0 \\
&\Rightarrow a - 1 = 0 \\
&\Rightarrow a = 1
\end{aligned}$$

لدينا: $a \notin \mathbb{R} - \{1\}$ إذن: لا يوجد أي مماس للمنحنى (C_f) يشمل النقطة ω

❻ رسم كل من (Δ) و (C_f) :



❼ المناقشة البيانية:

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = \frac{1}{2}x + m$ ، وهي:

لما	$m \in]-\infty; -1[$	للمعادلة حل موجب
لما	$m = -1$	للمعادلة حل معدوم
لما	$m \in \left]-1; -\frac{1}{2}\right[$	للمعادلة حل سالب
لما	$m = -\frac{1}{2}$	المعادلة لا تقبل حلولا
لما	$m \in \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$	للمعادلة حل موجب

(III

❶ دراسة شفعية الدالة h:

$$\begin{aligned} h(-x) &= f(|-x|) \\ &= f(|x|) \\ &= h(x) \end{aligned}$$

ومنه الدالة h زوجية

❷ توضيح كيف يمكن المنحنى (C_h) :

لدينا:

$$\begin{aligned} h(x) &= f(|x|) \\ &= \begin{cases} f(x) & ; \quad x \geq 0 \\ f(-x) & ; \quad x \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ومنه (C_h) ينطبق على (C_f) لما $x \geq 0$

وبما أن الدالة h زوجية فهي متناظرة بالنسبة لمحور التراتيب.

.... نتمنى أن تكونوا قد استفدتم بذلك القدر الذي نريده منكم .... انتهى .

أيها التلاميذ الشرفاء تذكروا أنَّ : تعب المراجعة أفضل من ألم السقوط ،،

ديزاد إكزام بكالوريا | DzExams BAC

https://www.dzexamsbac.com

المواد	الروابط المباشرة
الرياضيات	www.dzexamsbac.com/module/mathematiques
العلوم الفيزيائية	www.dzexamsbac.com/module/physique
علوم الطبيعة والحياة	www.dzexamsbac.com/module/sciences-naturelles
اللغة العربية	www.dzexamsbac.com/module/arabe
اللغة الفرنسية	www.dzexamsbac.com/module/francais
اللغة الإنجليزية	www.dzexamsbac.com/module/anglais
التاريخ و الجغرافيا	www.dzexamsbac.com/module/histoire-geographie
التربية الإسلامية	www.dzexamsbac.com/module/tarbia-islamia
الإقتصاد والمناجمنت	www.dzexamsbac.com/module/economie
التسيير المحاسبي والمالي	www.dzexamsbac.com/module/comptabilite
القانون	www.dzexamsbac.com/module/droit
الهندسة المدنية	www.dzexamsbac.com/module/genie-civil
الهندسة الميكانيكية	www.dzexamsbac.com/module/genie-mecanique
هندسة الطرائق	www.dzexamsbac.com/module/genie-procedes
الهندسة الكهربائية	www.dzexamsbac.com/module/genie-electrique
الفلسفة	www.dzexamsbac.com/module/philosophie
اللغة الألمانية	www.dzexamsbac.com/module/allemand